RB

I) BASES

INTRO

— m̃ forme en R ? catégories

classer

2 à 2

avoir un pt commun

~~ensemble~~ $\mathbb{Z}$ / n $\mathbb{Z}$

~~éléments~~ ?

~~ne sont pas~~ ~~mêmes~~

x et ~~E, questions~~

d que y

même

y

BAILLY

PLAYLIST RB

(d) (d') ds E D_s P

(d) R_5 (d') ⟺ (d) et (d') sont //

⊥

R_6

sécantes

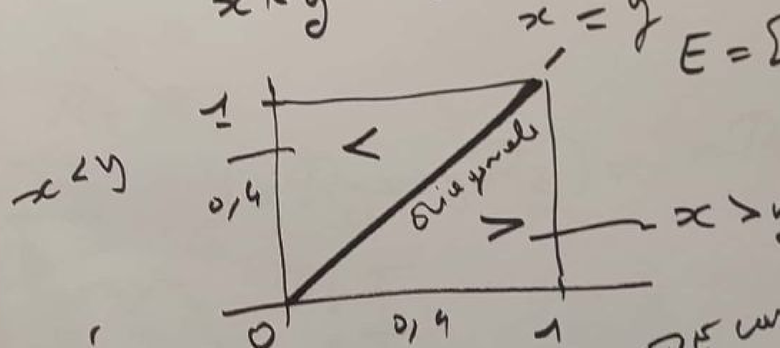
R_7

R

RB sur E est une partie de E×E

Si $(x,y) \in R$ on dit que x est en relation avec y
en liaison avec

$x R y$



$E = [0,1]$

[un uni limite]

R

E×E entier

$\underline{R}^{é}$ ssi $\forall x \in E, x R x$

~~R1~~ R_1 ~~R~~

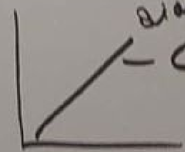
R_2 R

R_3 R

tableaux

sont reliés à eux m̂

diag



⊂ E×E

RB

I) BASES

INTRO

m̂ forme / en m̂ R à — catégories — classer

○△ m̂ couleur — 2 à 2

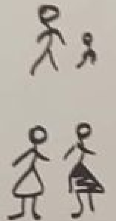
plus grd que — avoir un pt commun

Ex

x y

$x R_1 y \Leftrightarrow x$ est strict plus grd que y

$x R_2 y$ — x et y sont de m̂ sexe



x y ds $\mathbb{N}$

$x R_3 y \Leftrightarrow x$ est un multiple de y

$60 R_3 10$ $63 R_3 9$

R_4 $x-y$ pair

$60 R_4 10$ $63 R_4 9$

(d) (d') ds E D_s P

$(d) R_5 (d') \Leftrightarrow$ (d) et (d') sont //

R_6 $\perp$

R_7 sécantes

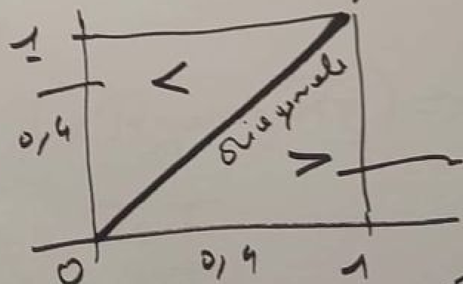
RB ($\mathcal{R}$) sur E est une partie de $E \times E$

Si $(x,y) \in \mathcal{R}$ on dit que x est en relation avec y (en liaison de)

$x \mathcal{R} y$

$x = y$ $E = [0,1]$ (un une limite)

$x < y$ $x > y$



$E \times E$ carré $\mathcal{R}$

$\mathcal{R}$ é ssi $\forall x \in E, x \mathcal{R} x$

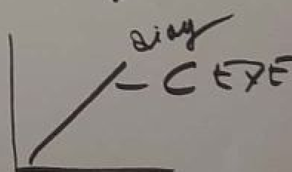
~~R1 X~~ $\mathcal{R}_1$ X

$\mathcal{R}_2$ R

$\mathcal{R}_3$ R

tableaux

sont reliés à eux m̂



Ex

$\mathcal{R}_4$ ~~R~~ R

$\mathcal{R}_5$ R

$\mathcal{R}_6$ ~~R~~

$\mathcal{R}_7$ R ★

presque ~~antisymétrique~~ S

$\underline{S}$ $\quad x \rightleftarrows y$

sym / diag

ssi $\forall x, y \in E,\ x\mathcal{R}y \Longrightarrow y\mathcal{R}x$ "géom^t"

Ex

$\mathcal{R}_1$ ~~S~~

$\mathcal{R}_2$ S

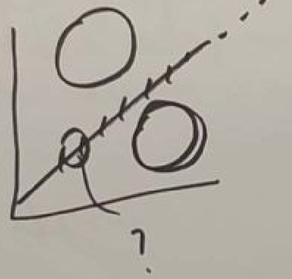
$\mathcal{R}_3$ ~~S~~ — 10 60 environ 60

$\mathcal{R}_4$ S

$\mathcal{R}_5$ S

$\mathcal{R}_6$ S

$\mathcal{R}_7$ S



$\underline{\text{ANTI S}}$ $\leq$ △! A

$(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \Longrightarrow x = y$

$\mathcal{R}_1$ ~~A~~ ⟸ seulement pour $x = y$ antisymétrique

$\mathcal{R}_2$ ~~A~~

$\mathcal{R}_3$ A sur $\mathbb{N}$

$\mathcal{R}_4$ ~~A~~

$\mathcal{R}_5$ ~~A~~

$\mathcal{R}_6$ ~~A~~

$\mathcal{R}_7$ ~~A~~

$= \langle S, A$ la seule!

pas antisymétrique

$\underline{T}$ $\quad (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Longrightarrow x\mathcal{R}z$

$x \to y \to z$

$\mathcal{R}_1$ T

2 T

3 T

4 T

5 T inclusion

6 pas T

7 pas T

2/3 R equiv

D | E
R E sur E tq R B de E :

R

S

T $\qquad$ ERST

les élts sont dit équivalents

Propriétés $\Leftrightarrow$ RST $\qquad$ le relation d'équivalence ou une relation d'équi

sur $\mathbb{R}$

1 $=$

2 $\leq$

3 $xRy \Leftrightarrow xy \geq 0$

4 $xR'y \Leftrightarrow x^2 = y^2$

1 $x = x$
Si $x = y$ Al $y = x$
Si $x = y$ et $y = z$ Al $x = z$

2 $\quad 2 \leq 3 \quad 3 \not\leq 2 \quad \cancel{S}$

3 $\quad x^2 \geq 0$; si $xy \geq 0$ Al $yx \geq 0$

Si ~~xy~~ $xy \geq 0$ et si $yz \geq 0$ Alors $(xy)(yz) \geq 0$

Dc $xy^2z \geq 0$ ~~dc~~ $xz \geq 0$

* Sur $\mathbb{R}$ NON
Sur $\mathbb{R}^*$ oui

4 $\quad x^2 = x^2$; si $x^2 = y^2$ Al $y^2 = x^2$

Si $x^2 = y^2$ et $y^2 = z^2$ Al $x^2 = z^2$

E

Utilisation

formes ≠ couleurs contextes

RE 1 R entre elts qui ont ~~...~~ 1 pt commun

même couleur RST $\qquad$ "avoir le même que" caractéristique

– forme —

même stc ...

Classe trier

CE

| E $\mathcal{R}$ RST

Pour $\forall x$ de E on def la

CE de x $= \dot{x}$,

Ens elts en $\mathcal{R}$ avec x

$\dot{x} = \{y \in E, x \mathcal{R} y\}$ — $y \mathcal{R} x$

ex EQs

non/ serie

$\ni x$ lui m̄ $\mathcal{R}$

cf vidéo hors série

Quotient

Ens des CEs de E = Ens quotient de E par $\mathcal{R}$

$= \boxed{E/\mathcal{R}}$

Ens d'Es de parties

très important!

EXs

$=$ ne change rien

$\forall x \in E$, $\dot{x} = \{x\}$

E : étudiants

$\mathcal{R}$: "m̄ sexe"

2 CEs : {garçons, filles}

2 es de EQ

1 - $E : \mathbb{R}^*$,

$\mathcal{R} : x \mathcal{R} y \Leftrightarrow \underbrace{xy}_{\text{sont de m̄ signe}} \geq 0$

>0 si $+$ -

>0 si $-$ +

Si $x > 0$, $\dot{x} = \mathbb{R}^{+*}$

$<$ $\quad = \mathbb{R}^{-*}$

· $\mathcal{R}$

~~$x\mathcal{R}y$~~ $x \mathcal{R}' y \Leftrightarrow x^2 = y^2$

$2^2 = 4$

$(-2)^2 = 4$

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\dot{x}\ \{-x, x\}$

pas tous m̄ taille

$\dot{0} = \{0\}$

Est ce rationnel?

$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ $\quad (a,b)$

$-7 \quad -6$

$0 \quad +4$

$\dot{n} \times \dot{a}$

m̄ multiple

$(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow ad - bc = 0$

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, (c,d) = k(a,b)$

$\mathcal{R}$ "colinéarité"

Le CE de (a,b) est notée $\frac{a}{b}$

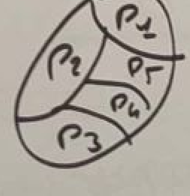
$$\boxed{\frac{18}{12} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}}$$

$F^{\sim}$ valent fin donc équiv

$$\forall k \in \mathbb{Z}^*, \frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}$$

$$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*/\sim \; = \mathbb{Q}$$

Partition de E = famille de parties de E $(P_i)_{i\in I}$ tq :



Ax

pas bijectivement fini ! ni contour

- $\forall i \in I, P_i \neq \emptyset$

morceaux ne se coupent pas

- $\forall i,j \in I,\ i \neq j \Rightarrow P_i \cap P_j = \emptyset$
- $E = \bigcup_{i\in I} P_i$

1er lien

| ~~Soit~~ E muni d'1 RE $\mathcal{R}$

Ens des CEs de $\mathcal{R}$ forme une partition de E

Preuve :

Comme ~~…~~ $\mathcal{R}$ est R

$\forall x \in E$, $\dot{x}$ contient x donc $\dot{x} \neq \emptyset$

$\forall x \in E, x \in \dot{x}$ donc $\bigcup$ des CE est E

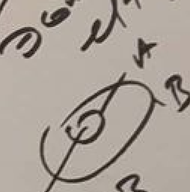
Si $\dot{x} \cap \dot{y} \neq \emptyset$, soit $z \in \dot{x}\cap\dot{y}$, on $x\mathcal{R}z$ et $y\mathcal{R}z$

S : $z\mathcal{R}y$

T $x\mathcal{R}y$ donc $\dot{x} = \dot{y}$

Par contraposition, $\dot{x} \neq \dot{y} \Rightarrow \dot{x}\cap\dot{y} = \emptyset$

comme elt



$A \subset B$

$B \supset A$ contient A

$x \in A$

$A \ni x$

A contenu dans B peut aussi signifier $A \in B$

Réc

| $(P_i)_{i \in I}$ une Partition d'un Ens E

on D $\mathcal{R}$ par

$x \mathcal{R} y \iff \exists i \in I, x \in P_i$ et $y \in P_i$

Al $\mathcal{R}$ est une RE dont CEs sont les Es forment la partition

Preuve

$\mathcal{R}$ clairement RST

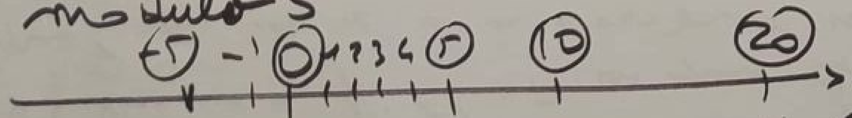
$\forall x \in E, \exists i \in I$ tq $x \in P$ mais Alors

$x \mathcal{R} y \iff y \in P_i$ donc $\dot{x} = P_i$

une façon de classer les objets

entiers

- modulo 5



- multiples de 5 sont pareils au entier 0
- reste = 1 dans la ÷ par 5 $\boxed{-4}$ $\boxed{1}$ $\boxed{6}$ $\boxed{11}$

multiples de 5+1

- reste = 2 dans ÷ par 5

2 7

- reste = 3 ———
- ——— = 4

partition de Ens $\mathbb{Z}$ 5 morceaux

il existe une RE tq u... le quotient

à ces 5 morceaux — classe de 1

QUOTIENT = $\{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \dot{3}, \dot{4}\}$

pour ...

de 5 en 5

écrire si ... sont multiple de 5

modulo 5

CONGRUENCE

| $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

| a et $b \in \mathbb{Z}$, on dit que

a et b sont congrus modulo n ssi

- a et b ont le même reste dans la ÷ par n

soit - $a - b$ multiple de n

sur RE et le quotient se note

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$n-1$

r'ibles opérations

3/3 RO [illegible] LE FLOCH

| E RO sur E tle RB:

O R A T — hyp sup

S R S T

D/

- R

$\forall x \in \mathbb{Z}, x \leq x$

$<$ ~~RO~~ — ~~st~~ strictement inf — RO strict

- Anti S

$\forall x, y \in \mathbb{Z}, (x \leq y \text{ et } y \leq x) \Rightarrow x = y$

- T $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}, (x \leq y \text{ et } y \leq z) \Rightarrow x \leq z$

(E, R) ens ordonné

EX 1

$\leq$ RO sur

$\mathbb{N}\ \mathbb{Z}\ \mathbb{Q}\ \mathbb{R}$

$\mathbb{C}$?

EX 2

$\mathbb{N}$, R divisibilité :

$\forall a, b \in \mathbb{N}\ a | b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}, b = a k$

multiple de a — diviseur de b

a divise b

★ $5 | 25$

$4 | 12$

$2 \nmid 25$

plus petit au sens usuel

2 divise uniquement nb pairs et pas les autres

$\forall n \in \mathbb{N}, 1 | n$ + pt elt ~~[illegible]~~

—— $n | 0$

$0 | 0$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \nmid n$

RO?

Soient $a, b, c \in \mathbb{N}$,

- $a = a \times 1$ donc $a | a$
- $(a | b$ et $b | a) \Rightarrow \exists \underline{k,} l \in \mathbb{N}$, $b = ak$ et $a = bl$

Donc $b = blk$. Si $b = 0$ Alors $a = 0$ ($a = b$)

Sinon, $lk = 1$ donc $l = k = 1$ et $a = b$

- $(a | b$ et $b | c) \Rightarrow \exists k, l \in \mathbb{N}$, $b = ak$ et $c = bl$

Donc $c = akl$ et $a | c$

Ex 3

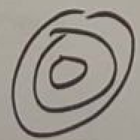
$\mathcal{P}(E)$ $\subset$ (strict ou?)

| $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$

$A \subset A$

Si $A \subset B$ et $B \subset A$ Alors $A = B$ $\quad \underline{A}$x

Si $A \subset B$ et $B \subset C$

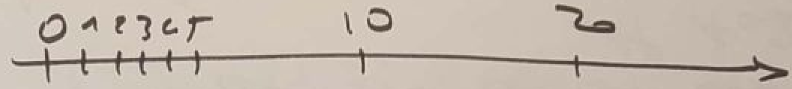


$x \in A \Rightarrow x \in B \Rightarrow x \in C$

Donc $A \subset C$

Comparable

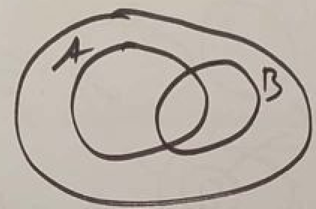
Entier $\mathbb{N}$



et

$x \leq y$ ou $y \leq x$ $\quad$ $5 | 10$ $\quad$ $5 \nmid 2$ $\quad$ $2 \nmid 5$

pas comparables



$A \not\subset B$ et $B \not\subset A$

| $(E, \mathcal{R})$ ordonné et $x, y \in E$

x et y sont comparables ssi ($x \mathcal{R} y$ ou $y \mathcal{R} x$)

| $(E, \mathcal{R}_o)$

Si 2 elts quelconque de E sont comparables

$\mathcal{R}$ RO total sur E

$(E, \mathcal{R})$ tot^t ordonné ~~si~~ sinon partiel

$\leq$ RO tot sur $\mathbb{N}$ $\mathbb{Z}$ $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$

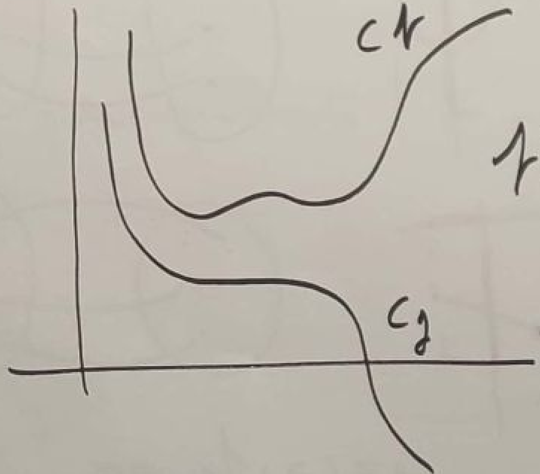
$|$ sur $\mathbb{N}$ et $\subset$ sur $\mathcal{P}(E)$ RO partielles

Ordre sur les f^{ns}

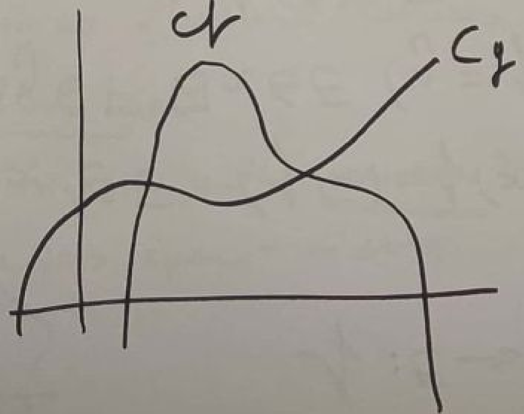
I un int de $\mathbb{R}$

Si f et g sont des a_s $I \longrightarrow \mathbb{R}$

$f \geq g \iff \forall x \in I, f(x) \geq g(x)$



$f \geq g$



RO partiel

Ordre sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Comment ordonner $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$?

$(1,3)$ et $(5,7)$? $(1,3) \leq (5,7)$

1ère méth

~~[illegible]~~) $(a,b) \leq (c,d) \iff a \leq c$ et $b \leq d$

= ordre produit sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

vérifier que c'est une RO

$(1,8)$? et $(5,7)$? O partiel...

Ordre sur un produit

$(E_1, \leq_1)$ et $(E_2, \leq_2)$ ordonnés

$\leq$ sur $E_1 \times E_2$ est def par

$(a,b) \leq (c,d) \iff a \leq_1 c$ et $b \leq_2 d$

Ne peut-on pas en déduire un ordre sur $\mathbb{C}$?

Ordre sur $\mathbb{C}$

$a+ib \leq c+id \iff a \leq c$ et $b \leq d$

Cet ordre prolonge l'ordre usuel de $\mathbb{R}$

$a+i\times 0 \leq c+i\times 0 \iff a \leq c$

mieux si total $\mathbb{C}$

Ordre lexicographique sur $\mathbb{C}$

$a+ib \leq c+id \iff a<c$ ou ($a=c$ et $b\leq d$)

pratique

R total

1 hor
2 vert

Comparez les suivants

$1+3i \leq 5+7i$

$1-3i \geq 3i$

$5i \leq 7i$

Pourquoi on ne l'utilise jamais?

Pensons un peu

Sur $\mathbb{C}$ (ou sur autre anneau)

il y a 2 opérations $+$ et $\times$

~~Compatibilité~~
Compatibilité Ros et opéra°

Un anneau ordonné $(A, \leq)$ doit vérifier:

- $\forall a,b,x \in A$, $a\leq b \Rightarrow a+x \leq b+x$

R invariante par translation

- $\forall a,b \in A$, $(a\geq 0$ et $b\geq 0) \Rightarrow ab \geq 0$

$i \geq 0$

$i^2 = -1 \leq 0$ $\boxed{-1\leq 0}$

Muni de cet ordre $\mathbb{C}$ n'est pas un corps ordonné!

et avec un autre ordre?

$i \leq 0$

$0 \leq -i$

$(-i)^2 = -1 \leq 0$

$\mathbb{C}$ n'est pas un corps ordonné!

quelque soit l'ordre

Cela ne fonctionne jamais!

Normal ordre sur $\mathbb{N}$

lexico

Ranger par ordre croissant :

0,325 0,66 0,5 0,152 0,36

$0,152 \leq 0,325 \leq 0,36 \leq 0,5 \leq 0,66$

on pose $152 \leq 325 \leq 36 \leq 5 \leq 66$

RO?

$a \leq b \iff a(1) < b(1)$ ou

$a(1) = b(1)$ et $a(2) < b(2)$ ou ...

ou $a(i) = b(i)$ pr tous les chiffres de a

$5229 \leq 523$ $350 \leq 36 \leq 360 \leq 4$

Preuve

$\forall a \in \mathbb{N}$ $a \leq a$ par D

Soient $a, b \in \mathbb{N}$, si $a \leq b$ et $b \geq a$ Al

$a(i) = b(i)$ pr tous les chif de a

$b(i) = a(i)$ ———— b

si $a = b$

| $a, b, c \in \mathbb{N}$ tq $a \leq b$ et $b \leq c$

$a = 123$ $b = 14$ $c = 1864$

123 1281 201

12 128 1280 ...

Ordre lexicographique sur $\mathbb{N}$

$1225 \leq 19 \leq 213 \leq 453945 \leq 475 \leq 69$

1 → a

2 → b

3 → c

4 → d

abba ≤ ai ≤ bac ≤ société ≤ boy ≤ fi

alphabétique

ordre total