

$E \vee \ni \vec{u}, \vec{v}$ vecteurs
 E indane typ addit +
extense à aide d'un corps
 $\rightarrow K$ scalars
 $\rightarrow \mathbb{R}, \mathbb{C}$

+ Definition
 de ESP vectoriel
 + Def E espace affine
 + So au début
 jusqu'à somme
 inclus
 BAILLY ALGÈBRE

① EV
 ② SEV
 ③ FL
 ④ FG
 ⑤ BADE
 ⑥ DIM
 ⑦ SOMME
 (SAUF
 applin)

$K = K-EV$
 + Pés suivants:
 ~~$(K, +, \cdot)$~~
 $(K, +, \cdot)$ module
 ou K somme

module de K ★
 Dé

$\vec{u} \rightarrow$ somme de K ★

module de K ★
 $0 \rightarrow OE \rightarrow$

$V = (E, \mathbb{R})$ car des
 vecteurs scalaires

V est un vecteuriel sur $\mathbb{R}$ ni axioms,
 biadditive suivant les règles

① $(E, +)$ groupe $\subset$

② il existe une LCE à opérateurs réels + 0

$(E, \mathbb{R}) \rightarrow E \quad E \times \mathbb{R} \rightarrow E$
 $(\vec{v}, \alpha) \rightarrow \vec{w} = \alpha \vec{v}$

$1 \vec{v} = \vec{v}$

$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \forall \vec{v} \in E \quad \alpha(\beta \vec{v}) = (\alpha\beta) \vec{v}$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall (\vec{v}, \vec{v}') \in E \times E \quad \alpha(\vec{v} + \vec{v}') = \alpha \vec{v} + \alpha \vec{v}'$

$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}, \forall \vec{v} \in E \quad (\alpha + \beta) \vec{v} = \alpha \vec{v} + \beta \vec{v}$

$\mathbb{R}^2 \mathbb{R}^3$

$EV_s \ni \vec{u}, \vec{v}$ vecteurs

E indane typ addit +
externe à aide d'un corps

$\hookrightarrow K$ des scalaires
 $/ \mathbb{C}^{\mathbb{R}} / \text{symbol}$

scalaires de $K \hookrightarrow \mathbb{R}$

D E est un EV sur le corps $K = K-EV$

On a défini 2 lois ayant P's suivantes:

1. $(E, +)$ Groupe Abélien

2. $\mathbb{R}^0 \mid K \times E \rightarrow E$
 $(\lambda, \vec{u}) \rightarrow \lambda \vec{u}$

~~$(K, +, \cdot)$~~

$(K, +, \cdot)$ module
ou K somme

(a) $\lambda(\mu \vec{u}) = (\lambda \mu) \vec{u}$ $\rightarrow$ module de K *

(b) $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \vec{u} + \lambda \vec{v}$ $\rightarrow$ Dé

(c) $(\lambda \vec{u}) + (\mu \vec{u}) = (\lambda + \mu) \vec{u}$ $\rightarrow$ somme de K *

(d) $1 \vec{u} = \vec{u}$ $\rightarrow$ unité de K *

$(E, +)$ $\vec{0} \in E$ $\vec{0} \in E$ $\vec{0} \in E$

$V = (E, \mathbb{R})$ corps des
vecteurs scalaires

V est un module sur $\mathbb{R}$ si axiomes
biadditivité suivants sont vérifiés

(1) $(E, +)$ groupe $\subset$

(2) il existe une LCE à opérateurs réels $+ \cdot$

$(E, \mathbb{R}) \rightarrow E \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \rightarrow E$

$(\vec{v}, \alpha) \rightarrow \vec{w} = \alpha \vec{v}$

$1 \vec{v} = \vec{v}$

$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \forall \vec{v} \in E \quad \alpha(\beta \vec{v}) = (\alpha\beta) \vec{v}$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall (\vec{v}, \vec{v}') \in E \times E \quad \alpha(\vec{v} + \vec{v}') = \alpha \vec{v} + \alpha \vec{v}'$

$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}, \forall \vec{v} \in E \quad (\alpha + \beta) \vec{v} = \alpha \vec{v} + \beta \vec{v}$

$\forall \mathbb{R}^2 \mathbb{R}^3$

ESPACE AFFINE

$\mathcal{E}$ LE ~~espace~~ ^{ensemble} EV $E = \{\vec{u}, \vec{v}, \dots\}$
 (il n'y a pas d'origine)
 EV directeur de E

note
additivement +

$= \{M, P, Q, \dots\}$ points

+ $E \times E \rightarrow E$

$(\vec{u}, M) \rightarrow M + \vec{u}$

(1) $(M + \vec{u}) + \vec{v} = M + (\vec{u} + \vec{v})$ somme des E

(2) $M + \vec{0}_E = M$

(3) $\vec{0}_E$ est l'unique vec vérifiant
 $M + \vec{x} = M, \forall M \in E$

(4) Pour tout "point" (P, Q) de E
 il ~~est~~ existe un vec $\vec{u}$ de E tq
 $Q = P + \vec{u}$

→ Si P or Q sont fixés, $\vec{u}$ est unique

on peut écrire $Q = P + \vec{u}$

sous la forme

$$Q - P = \vec{u}$$

or on veut dire $\overrightarrow{PQ} = \vec{u}$
 $Q - P = \vec{u}$

Alors on a $Q = P + \vec{u}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} = \vec{u}$$

$P \in E$

$$Q = P + \overrightarrow{PQ}$$

$$\overrightarrow{PM} = \vec{0}_E$$

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MQ} \Leftrightarrow P = Q$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MQ} \quad \mathcal{R} \text{ chers}$$

P, Q (pas pour les vecteurs car points)

A fixé $E \rightarrow E$
 $\vec{u} \rightarrow A + \vec{u}$

f à l'avec $\vec{u}$ car on n'a pas M or on a seul
 + $f(\vec{u}) = M$
 "même avec $\vec{u}$ le même M "
 ou $A + \vec{u} = M$

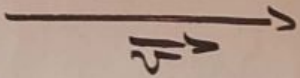
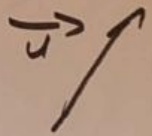
on peut considérer EA comme l'ensemble
 des extrémités des vecteurs de E , les
 derniers sont "rattachés à la même
 origine A "

1 EV

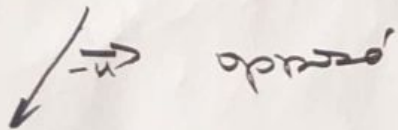
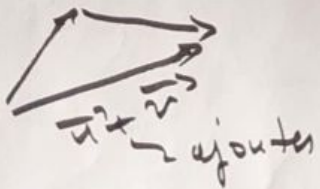
"Vrais" vecs

représent

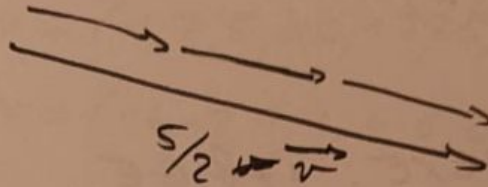
- L'Nome
- Direction
- Sens + trajet



Sont les objets se comportant comme
des vecteurs
?



$S/2$

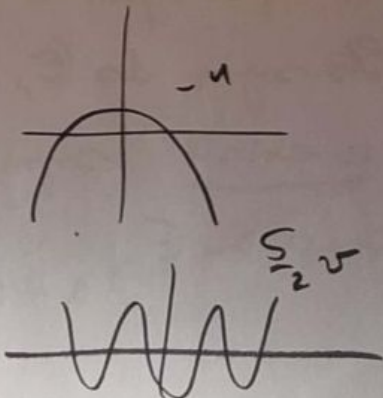
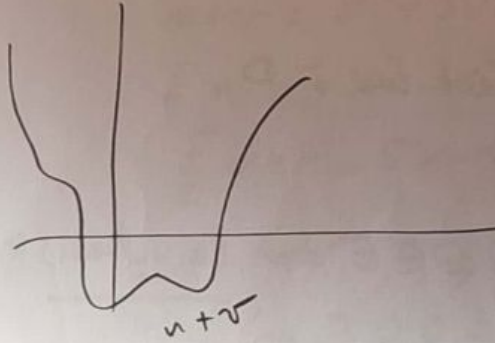
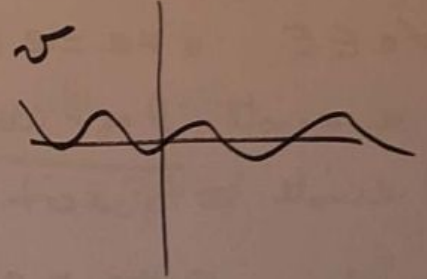
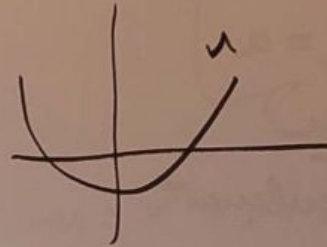


+

opposé

x n'importe quel

$\downarrow S$ min $R \rightarrow R$



$S/2$

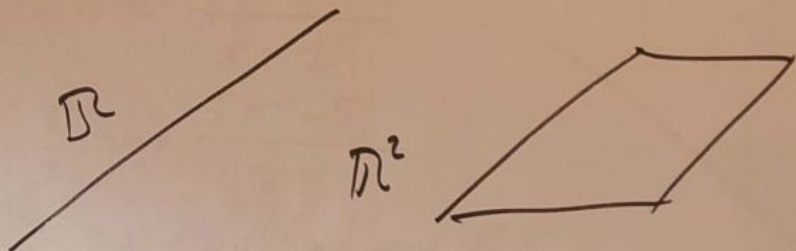
Coulommes

$$u = (1, 2) \quad v = (4, -2)$$

$$u+v = (5, 0)$$

$$-u = (-1, -2)$$

$$\frac{5}{2}v = (10, 5)$$



Mat

$$u = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$u+v = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \quad -u = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{5}{2}v = \begin{pmatrix} -10 & -5 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^4$

$$M_{n,n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$$

in case

Suites

" $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ "

$$u = (1, 2, 5, 10, 17, 26, 37, 50, \dots) \quad u_n = n^2 + 1$$

$$v = (-4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, \dots) \quad v_n = 2n - 4$$

$$u+v = (-3, 0, 5, \dots)$$

$$(u+v)_n = n^2 + 2n - 3$$

$$-u = (-1, -5, \dots)$$

$$(-u)_n = -n^2 - 1$$

$$\frac{5}{2}v = (-10, -5, \dots)$$

$$\left(\frac{5}{2}v\right)_n = 5n - 10$$

roc
brunle

Pol

$$u = x^2 + x + 1 \quad v = 2x - 4$$

$$u+v = x^2 + 3x - 3$$

$$-u = -x^2 - x - 1$$

$$\frac{5}{2}v = 5x - 10$$

$$u = (1, 1, 1, 0, 0, 0, \dots)$$

$$v = (-4, 2, 0, 0, 0, \dots)$$

pas qd chose
pas 1 vec

Suite mesme nullle

Fraction

$$u = \frac{x^2+1}{x+1} \quad v = \frac{x^3-1}{x}$$

$$u+v = \frac{x^4+2x^3-1}{x^2+x}$$

$$-u = \frac{-x^2-1}{x+1}$$

$$\frac{5}{2} v = \frac{5x^3-5}{2x}$$

as val de m EV

X quelc
E EV

$$u: X \rightarrow E$$

$$x \rightarrow u(x)$$

$$v: X \rightarrow E$$

$$x \rightarrow v(x)$$

$$u+v: X \rightarrow E$$

$$x \rightarrow u(x) + v(x)$$

$$-u: X \rightarrow E$$

$$x \rightarrow -u(x)$$

$$\frac{5}{2} v: X \rightarrow E$$

$$x \rightarrow \frac{5}{2} v(x)$$

$X = \mathbb{N}$: suites

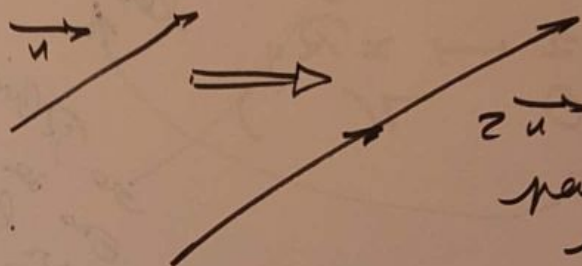
elts de E

constituent m EV

Classe d'anneau qui sont

Classe qui m nb?

$\mathbb{R} \quad \mathbb{Q} \quad \mathbb{Z}$ interdit



peut pas revenir en arrière

$\mathbb{R} \oplus \mathbb{Q}$ puis

$\mathbb{K}$ corps G_m

$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \quad \mathbb{R}(X)$

premier

Fraction

Module

on peut $\div$ en m'importe quoi

D R-EV

LCi +
LCE

scalaires
 $R \times E \rightarrow E$
 $(\alpha, x) \rightarrow \alpha x$

*pas bonne
notion*

$(E, +)$ GL

- $\forall x, y, z \in E, x + (y + z) = (x + y) + z$ (A)
- $x + y = y + x$ (C)
- il existe 0_E $\forall x \in E, x + 0_E = x$ (N)
- $\forall x \in E, \exists y \in E, x + y = 0_E$ (S) *$\neq 0$ opposé*
- $\forall \alpha \in R, \forall x, y \in E, \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ D
- $\forall \alpha, \beta \in R, \forall x \in E, (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
- $(\alpha \times \beta)x = \alpha(\beta x)$
- $\forall x \in E, 1_R x = x$

en pratique
↓

principaux *

R $M_{m,n}(R)$

R^n $\mathcal{L}(X, R)$

R en
suites $R[X]$
 $R((X))$

$F(X, E)$

*Certaines
Généralisations*

1996

$\Rightarrow$ que SEV!

2 SEV

Critère

Principaux sont:

Resumé

K corps commutatif
 $E \vee E$

$(E, +)$
 $0_E(K, +, \cdot)$
 $0_K \rightarrow K$

$$K \times E \rightarrow E$$

$$(\alpha, x) \rightarrow \alpha x$$

$$\bullet x + (y + z) =$$

$$\bullet x + y = y + x$$

$$\bullet x + 0_E = x$$

$$\bullet x + y = 0_E$$

$\hookrightarrow$ opère

$(E, +)$ Gr C
 want tout

$$\bullet \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$$

$$\bullet (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$$

$$\bullet \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x \quad ("A")$$

$$\bullet 1_K x = x \quad ("1")$$

pour $e \in K = \mathbb{R}$

K $M_{m,n}(K)$
 K^m $F(x, D)$

K $K[x]$
 $B(x)$
 $F(x, E)$

95,506
 52

15/11/2012
 (11/11/2012)

15/11/2012
 (11/11/2012)

15/11/2012
 (11/11/2012)

15/11/2012
 (11/11/2012)

$$(K, +, \cdot)$$

$$(E, +)$$

$$K \times E \rightarrow E$$

$$(1, x) \rightarrow 1 \cdot x$$

$$(E, +) \in \mathcal{C}$$

$$\begin{aligned} 1 \cdot (x+y) &= 1 \cdot x + 1 \cdot y \\ (1+\mu) \cdot x &= 1 \cdot x + \mu \cdot x \\ 1 \cdot (\mu \cdot x) &= (\mu) \cdot x \\ 1 \cdot x &= x \end{aligned}$$

$$\text{EX } (K, +, \cdot)$$

$$\mathbb{A} \subset \mathbb{C}$$

$$(\mathbb{A}, +, \cdot) \text{ R-} \mathbb{A}$$

$$(\mathbb{A}, +, \cdot) \text{ } \mathbb{Q}\text{-} \mathbb{A}$$

$$(\mathbb{R}^n, +, \cdot) \text{ R-} \mathbb{A} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$$(\mathbb{F}, (\mathbb{P}, \mathbb{A}), +, \cdot)$$

Non-restricted $\rightarrow$ EV with num

$$(\mathcal{M}_2 \mathbb{R}, +, \cdot)$$

$$f: E \rightarrow F$$

$$\text{homom} = \Delta L$$

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$f(1x) = 1 f(x)$$

E EV sur $\mathbb{R}$

forme n linéaire
 $\in \mathbb{N}^*$

a $f: E^n \rightarrow \mathbb{R}$

lin / chaque u_i se $\forall$ elt

$(u_1, u_2, \dots, u_n) \in E^n$

Traduction

$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \in$

$\forall (u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n) \in E^{n-1}$

$f_i: E \rightarrow \mathbb{R}$

$u_i \mapsto f_i(u_i) = f(u_1 \dots u_n)$
 ord lin

$n=2$ bi

$n=3$ tri

alternée qui s'annule par n multiples
 de e car chaque 2 elt s'annule

Si $n=2 \forall x \in E, f(x, x) = 0$

$\exists \forall (x, y) \in E^2 f(x, y, y)$

$x \wedge x$
 $y \wedge x \wedge x = 0$

Def E_2

$b = (e_1, e_2, \dots)$

$\odot E_2 \mapsto u(x, y)$
 $\mapsto (x', y')$

$$\det_b(u, v) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$$

E_3

~~PS~~ ~~sur $\mathbb{R}$~~ EV Norme euclidienne
 sur le $\mathbb{R}$ -EV E $\forall$ forme f

- bilin

- sym $(\forall (u, v) \in E^2, f(u, v) = f(v, u))$

- $\oplus^{ue} f(u, u) \geq 0$

- $\odot f(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0_E$

EV Euclidien

u, v

Homom Gr

$$(E, *) \xrightarrow{0_E} (F, \perp)$$

$$h(x+y) = h(x) \perp h(y)$$

$$\text{Im } h = \{t \in F \mid \exists x \in E, t = h(x)\}$$

$$\text{Ker } h = \{x \in E \mid h(x) = 1\}$$

isom b
endom E=F
autom

Formes bilinéaires de vec $\mathbb{R}^2$

forme bilin alternée

$$Q(\vec{v}, \vec{v}') = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$$

lin indéfini
si $\neq 0$

forme bilin symétrique = PS

$$\vec{v} \cdot \vec{v}' = \vec{v} \mid \vec{v}' = xx' + yy'$$

$$\text{Norme euclidienne de } \vec{v} = \|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\|\vec{v}\| = 0 \iff \vec{v} = \vec{0}$$

$$\|\lambda \vec{v}\| = |\lambda| \|\vec{v}\|$$

$$\text{SCHWARTZ } |\vec{v} \mid \vec{v}'| \leq \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{v}'\|$$

$$\text{TRIANGLE } \|\vec{v} + \vec{v}'\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{v}'\|$$

endom de $\mathbb{R}^2$

h AL "

$$h(\vec{v} + \vec{v}') = h(\vec{v}) + h(\vec{v}')$$

$$h(\lambda \vec{v}) = \lambda h(\vec{v})$$

$(\vec{i}, \vec{j})$ b canonique de $\mathbb{R}^2$

$$\forall \vec{v}, \exists! (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

Caractérisation par

$$h(\vec{i}) = a\vec{i} + b\vec{j}$$

$$h(\vec{j}) = c\vec{i} + d\vec{j}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x' = ax + cy \\ y' = bx + dy \end{cases}$$

$$h \text{ autom. } \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \neq 0$$

Composé endom

$$h \circ h = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa+cb & ac+db \\ ba+db & bc+dd \end{pmatrix}$$

$$\text{Autom } \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \varepsilon \quad \varepsilon \in \{+1, -1\}$$

$$\varepsilon = +1 \quad \text{rot} \quad \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$-1 \quad \text{sym} \quad \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

EA

E si $\exists$ et $\vec{E}$ en φ

$$\varphi: E \times E \rightarrow \vec{E}$$

$$(M, N) \mapsto \varphi(M, N) \text{ noté } \overrightarrow{MN}$$

ty

$$\forall O \in E \forall \vec{u} \in \vec{E} \quad \exists ! M \in E \text{ ty } \overrightarrow{OM} = \vec{u}$$

tx UNASLES

$$\forall (A, B, C) \in E^3 \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

nt

l'ensemble de $\vec{E}$

orientation de $\vec{E}$

A fixé

$\vec{F}$ sera $\vec{E}$

SEA permet pas d'être un $\vec{F}$

$$F = \{M \in E / \overrightarrow{AM} \in \vec{F}\} \quad F(A, \vec{F})$$

↑

ABC BAC

CHANGER AVEC

SOURCE!

EAE

af que $\vec{E}$ n'est pas $\perp$ et enc *

Distance euclidienne

on

$$E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$(A, B) \mapsto d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|$$

$$= AB$$

$$P_1 \quad d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$$

$$d(A, B) = d(B, A)$$

$$d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$$

SEV

Critère $\rightarrow$ Comp Gm

$E: \mathbb{R}$ -ev

- i +
- $E: \mathbb{R} \times E \rightarrow E$
 $(\alpha, x) \rightarrow \alpha x$

- A +

- C +

- N O_E

- $x+y = O_E$

$\bar{a}$

- $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$

- $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$

- $(\alpha \times \beta)x = \alpha(\beta x)$

- $1_{\mathbb{R}} x = x$

FCE
ev?

$x+y \in F$ stable par +

$\alpha x \in F$

OK

OK

$O_E \in F$

OK

$(0+0)x = 0x+0x$
 $\Rightarrow 0x = 0_E$

$(-1)x + x = (-1+1)x = 0_E$

$\Rightarrow$ par se 21

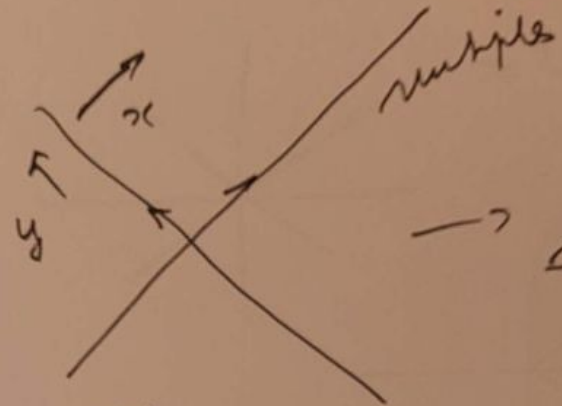
$x-x$

RÉSUMÉ

• F est un $\mathbb{R}$ -module ($O_E \in F$)

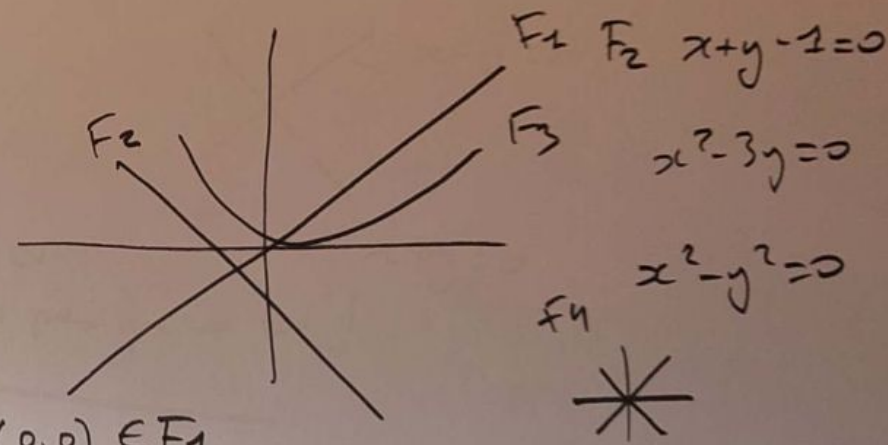
• F est stable par CL

$\alpha x + \beta y \in F$



EV sur P_m ?

$E = \mathbb{R}^2$ $F_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x-3y=0\}$



$F_1 (0,0) \in F_1$

$u = (x,y), u' = (x',y') \in F_1 \sim \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

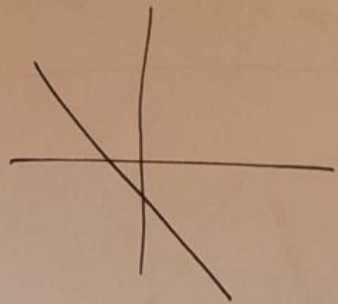
$\alpha u + \beta u' = (\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y')$

$2(\alpha x + \beta x') - 3(\alpha y + \beta y') =$
 $\alpha(2x-3y) + \beta(2x'-3y') =$
 0

$$\alpha u + \beta u' \in F_1$$

$$F_1 \text{ est un EV sur } \mathbb{R}^2$$

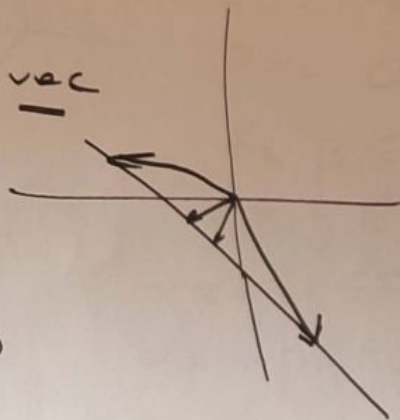
$$F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y - 1 = 0\}$$



$$(0, 0) \notin F_2$$

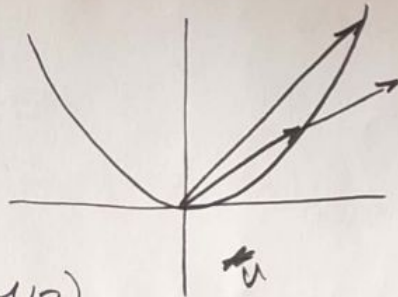
il n'y a pas
un SEV

x, y sont des vec



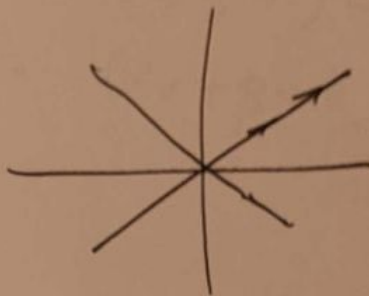
$$x^2 - 3y = 0$$

$$(0, 0) \in F_3$$



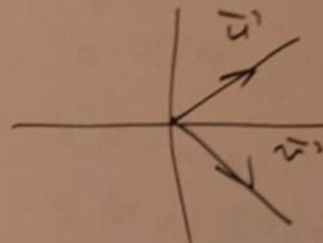
$$u = (1, 1/3)$$

$$u + u \notin F_3$$



$$x^2 - y^2 = 0$$

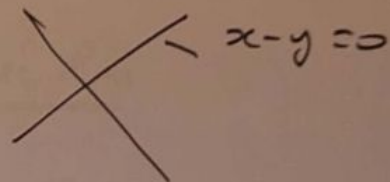
$$(0, 0) \in F_4$$



$$u = (1, 1)$$

$$v = (2, -2)$$

$$u + v = (3, -1) \notin F_4$$



$$x - y = 0$$

$$x + y = 0$$

$$\cup 2 \text{ EV}$$

$\rightarrow$ pas un EV !

si on a C d'autre

1)

E $\mathbb{R}$ -ev

Si F est G -st+2 sense E

Alors $F \cap G$ est m sense E



$\bullet O \in E$ et $O \in G$

Donc $O \in E \cap G$

$\bullet \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\forall x, y \in F \cap G$

$\alpha x + \beta y \in F$ et

$\alpha x + \beta y \in G$

Donc $\alpha x + \beta y \in F \cap G$

ou $\alpha x + \beta y \in G$

$E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$F = \{u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},$

$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n\}$

Suite

$\bullet (0, 0, 0, \dots) \in F$

$\bullet (\alpha u + \beta v)_{n+2} = \alpha u_{n+2} + \beta v_{n+2}$

$= \alpha(u_{n+1} + u_n) + \beta(v_{n+1} + v_n)$

$= \alpha u_{n+2} + \beta v_{n+2} + \alpha u_n + \beta v_n$

$= (\alpha u + \beta v)_{n+1} + (\alpha u + \beta v)_n$

$G =$

oui

réé lui

ser
oui, mto

$\in \mathbb{R}^0$

$u_{n+2} = n^3 u_{n+1} + e^{-n} u_n$

$E: \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ retenir sense E :

$F = \{\text{suite } (u_n)\}$ oui

G

$\nearrow$

non

$\nearrow \searrow$

4

non plus

non

$u = n^2 - 4n$

1

bonnes

oui

$= (0, -3, -4$

$-3, 0$

0

Gwenite oui

Fonctions

$E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ retourne vrai ou faux

1 $F_1 = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$ oui

2

$= 1$ non

3

$f(0) = 0$ ou $f(1) = 0$ non

4

$f'(0) = 0$ oui

5

$\int_0^1 f(x) dx = 0$ oui

P
pour $f \in E \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(-x)$ oui

CLASSIQUES

I int $\mathbb{R}$

$C^0(I, \mathbb{R}) = \{f, \text{fonction continue de } I \rightarrow \mathbb{R}\}$

$C^k(I, \mathbb{R})$ les dérivées de f de I vers $\mathbb{R}$ jusqu'à l'ordre k

$F = \{f, \text{fonction intégrable sur } I\}$

$G = \{f, \text{fonction bornée sur } I\}$

$H = \{f \in C^2(I, \mathbb{R}) \mid y'' + x^3 y' - e^x y = 0\}$ oui

POL

$E = K[X]$ ou $n \in \mathbb{N}$

$K_n[X] = \{P \in E \mid \deg(P) \leq n\}$ oui

$\alpha \in K, f_\alpha = \{P \in E \mid P(\alpha) = 0\}$ oui

$\varphi \in K[X] \quad \varphi[K[X]] = \{Q, P \in K[X]\}$ oui

$G = \{P \in E \mid P(x^2) = x P(x)\}$ oui

3 Fam de l'Es

généralités

Famille de vec

E K -ev

I ensemble quel groupe qcq

de E

(indexée par I)

$\alpha \mapsto f: I \rightarrow E$

nomme $u_i = f(i)$

note par $(u_i)_{i \in I}$

numérotés
indices
 ∞

ex $I = \{1, 2, \dots, n\}$

$(u_i)_{i \in I} \in E^n$ ser un n -uplet de

CL - o'hen un vecs vecteurs

$(u_i)_{i \in I}$ fam vecs de E

x de E est CL de la fam ssi

$\exists J \subset I$ une partie finie

$\exists (\alpha_i)_{i \in J}$ une fam d'elts de K

$$x = \sum_{i \in J} \alpha_i u_i$$

finie
nullité

ACE non vide qcq

$Vect(A) = E$ de CL de famille d'éléments de A ($Vect(\emptyset) = \{0_E\}$)

par D

ex

$C \triangle D$ D vec C

$\{x \in E, Vect(x) = Kx = \{\alpha x, \alpha \in K\}$



$$K^3 = Vect((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$$

$$K[x] = Vect((x^n)_{n \in \mathbb{N}})$$

$$E = M_2(K)$$

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in K \right\}$$

$$= Vect\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

EV ON ANDRÉ

par E

$\forall A \subset E, Vect(A)$ ser un ser de E ,

et c'est le plus petit ser de E contenant A

des sus suivant
Si F ser un ser de E contenant $A, Vect(A) \subset F$

Preuve :

$$| a \in A, 0_E = 0_A \in \text{Vect}(A)$$

une CL de CL est une CL
De $\text{Vect}(A)$ est un sous-VE de E

| Form zero de E contenant A

$$| x = \sum_{i \in I} \alpha_i a_i \in \text{Vect}(A)$$

$\forall i \in I, a_i \in F$ de $\alpha_i a_i \in F$ car G une
F est stable par CL

opérations, on a $x \in F$

EXOS

$$1) | u = (2, -1, 3); v = (-1, 4, 1) \in \mathbb{R}^3$$

trouver x tel que $(x, 10, 9) \in$
 $\text{Vect}(u, v)$

$$2) | P = X-1 \in \mathbb{R}[X]$$

quels sont les pol de $\text{Vect}(\{P^n / n \in \mathbb{N}^*\})$?

Sol

$$1) au + bv = (2a-b, -a+4b, 3a+b)$$

$$\text{pour res sys } \begin{cases} -a+4b=10 \\ 3a+b=9 \end{cases}$$

$$-13b = 39 \quad b = -3 \quad a = 2$$

$$2a-b = 1 = x$$

2)

$$P(1) = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, P^n(1) = 0$$

$$\text{De } Q \in \text{Vect} \implies Q(1) = 0$$

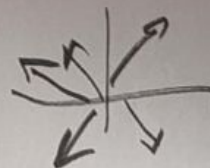
Fam gén

$$\left(| (u_i)_{i \in I} \text{ fam de vec de } E \right. \\ \left. \text{ssi } \text{Vect}((u_i)_{i \in I}) = E \right)$$

$$\text{EX } E = \mathbb{R}^2 \quad (1,0) \text{ et } (0,1)$$

$$2 \text{D}^{\text{mult}}$$

$$(3,2) \text{ et } (-1,1) ?$$



EX

$$\begin{cases} u = (2, -1, 3) \\ v = (-1, 4, -3) \\ w = (1, 0, 1) \end{cases} \in \mathbb{R}^3$$

On a que (u, v, w) gen,

on ne peut pas

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ sont des elts de } \text{vect}(u, v, w)$$

Ainsi $\text{Vect}(\quad, \quad, \quad) \subset \text{vect}(u, v, w)$

On veut dire que e_1, e_2, e_3 sont lin. ind. $\Rightarrow$ la monnaie

$$u - 2w = (0, -1, 1)$$

$$v + w = (0, 4, -2)$$

$$4(u - 2w) + v + w = (0, 0, 2) \text{ donc } (0, 0, 1) \in \text{vect}(u, v, w)$$

$$w - (0, 0, 1) = (1, 0, 0) \text{ donc } (1, 0, 0) \in \text{vect}(u, v, w)$$

$$2(1, 0, 0) + 3(0, 0, 1) - u = (0, 1, 0) \in \text{vect}(u, v, w)$$

Fam. lib. ou pas

$(u_i)_{i \in I}$ fam. de vec. de E

liée ssi

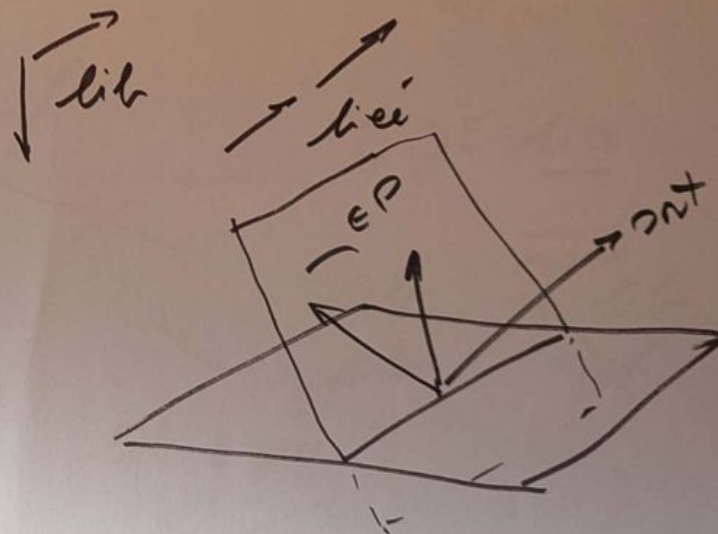
$$\exists j \in I \text{ } u_j \in \text{vect}(u_i)_{i \in I, i \neq j}$$

pas liée $\Rightarrow$ lib.

EX

Si u_1 et u_2 sont 2 vec. de E

(u_1, u_2) liée $\Leftrightarrow u_1$ et u_2 sont colin.



Caractère

$\{u_i\}_{i \in I}$ fam. vec. de E

libssi

$\forall J \subset I$ fini, $\forall (\alpha_i)_{i \in J}$ fam. d'elts de $\mathbb{R}$

$$\sum_{i \in J} \alpha_i u_i = 0_E \Rightarrow \forall i \in J, \alpha_i = 0$$

poss. CL nulle non triviale

Preuve Goursat

($\Rightarrow$)

($\Leftarrow$)

EX $\begin{vmatrix} u = 2, -1, 3 \\ v = -1, 4, -3 \\ w = 1, 0, 1 \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^3$

Pn M que on a, suppose

que $xu + yv + zw = 0_E$ avec $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ -x - 4y = 0 \\ 3x - 3y + z = 0 \end{cases}$$

mvot GAVS

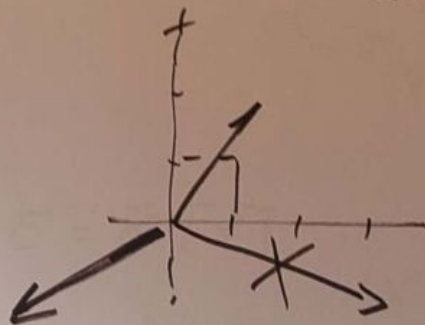
$$\begin{cases} -x + 4y = 0 \\ 7y + z = 0 \\ 9y + z = 0 \end{cases}$$

de $x = y = z = 0$
de famille!

P^6

$\{u_i\}_{i \in I}$ fam. vec. de E

Si perversité, He on famille
avec $J \subset I$, $(u_i)_{i \in J}$
argen



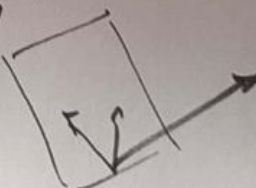
$J \subset I$ liei

lib ... lib

Base

alors

lib # gen
(en)



BASES

$$E \setminus K - EV \leftarrow$$

$(u_i)_{i \in I}$ (am s-o vec de) $\text{mat } \infty$

L base ss:

- genetics

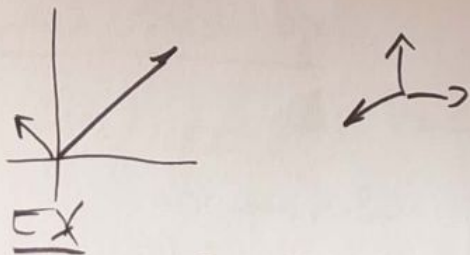
$$\text{Vect}((u_i)_{i \in I}) = E$$

- libre

✓ JCI fin.

$$\forall (\alpha_i)_{i \in J} \text{ famille et } \alpha \in \mathcal{A}$$

$$\sum_{i \in J} \alpha_i u_i = 0_E \Rightarrow \forall i \in J, \alpha_i = 0$$

~~Fig~~ $\{1, i\} \in \mathcal{Q}_0 \cap \text{EV } \mathcal{F}$

$$\exists a, b \in \mathbb{R}, z = a + ib$$

$$a + ib = 0 \Rightarrow a = 0 = b = 0$$

$$E = \mathbb{R}^n$$

$$e_4 = (1, 0, 0)$$

$$e_2 \quad \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

0

1) $\therefore$ promise

$\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ can be $\mathbb{R}^n$ i, j, k

$$E = M_{n,p}(K)$$

$$l_c \quad \{E_{k,l}, 1 \leq k \leq m, 1 \leq l \leq r\}$$

$$L = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \dot{y}^2 + \frac{1}{2} \dot{z}^2 \right) dt$$

$$E = \mathbb{K}[x]$$

$$\{X^n, n \in \mathbb{N}\}$$

$$E = \mathbb{Q}(x) \quad \star$$

coef of T all samples

$$\frac{x^6 \dots}{(x-1)^2}$$

lose $\{x^n, n \in \mathbb{N}\} \cup \left\{ \frac{1}{(x-a)^n} \right\}$

$$a \in \mathbb{C}$$

$$r \in \mathbb{N}^+$$

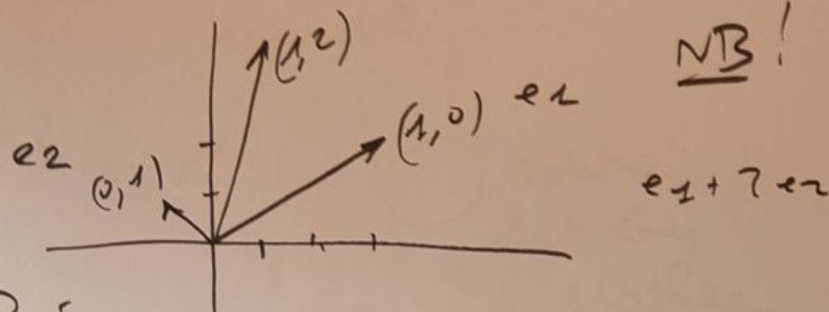
BASE 1 GOR

$B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E

Si $u = \sum_{i=1}^n x_i e_i$

on peut associer à u ses gor

soit B : $(x_1, x_2, \dots, x_n)$



NB!

B gén $\Rightarrow$ chaque $v \in E$ a ses gor

lib $\Rightarrow$ gor unique

CANONISATION

$(u_i)_{i \in I}$ fam vec de E

soit une lib

$\Leftrightarrow$

soit une fam gén maximale minimale

$\Leftrightarrow$

lib maximale

soit ~~lib~~ min?
qui max?

ajouts
ex

Preuve

- Sup $(u_i)_{i \in I}$ fam gén

- Si pas minimale,

C'est une sous famille d'une fam gén

DC pas lib

Par contenance: $(u_i)_{i \in I}$ lib $\Rightarrow (u_i)_{i \in I}$

- Si ~~lib~~, $\exists$ un vecteur $v \in E$ minimale

Si $v \in$ la lib, $\rightarrow$ pas fam gén

DC ~~pas~~ minimale

Par cont. minimale $\Rightarrow$ lib

- Une base est une fam gén minimale

Autre sens

lib fam lib maximale

T lib incomplète

$|n, m \in \mathbb{N}^*$

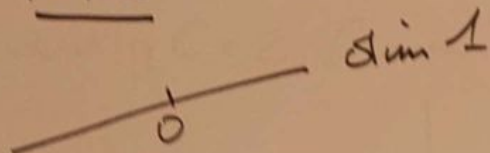
sup $\exists$ fam gén avec $(v_i)_{1 \leq i \leq m}$ de E

$(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ fam lib de E

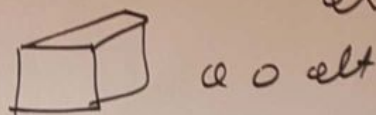
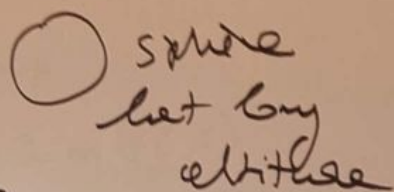
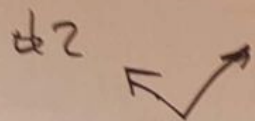
peut compléter par $\rightarrow$ base

DIM

INTRO



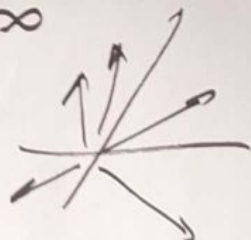
repérable



d4

D / E K -ev
finie

$E \Leftrightarrow \exists$ fam finie
qui continue $\dim \infty$



E dim finie $\Leftrightarrow \exists$ 1 b finie



Si E dim finie

Si B ^{er} b ou E

$\dim E = \text{card } B$

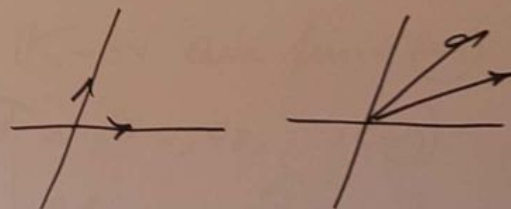
Convention $\dim \{0_E\} = 0$

- $|E| K$ -ev dim finie

Has b_i de E ont le même nb d'elt

et ce nb est $\dim E$!

EX



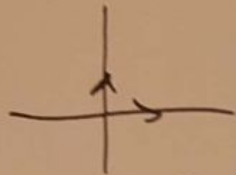
Preuve pas évidente

rec

lemme
T

$$\dim \mathbb{R}^n = n$$

$$\dim \mathbb{R}^2 = 2 \text{ (comme } \mathbb{R} \text{-EV)}$$



$$\dim \mathbb{C} = 1$$



$$\dim M_n(\mathbb{K}) = n^2$$

$$\dim \mathbb{K}[X] = +\infty = \dim \mathbb{K}(X)$$

APPLICATIONS

pour de $\mathbb{R}^3$

$$\{(2, 1, 0); (3, 1, 4); (1, 3, 2); (0, 2, -2)\} \text{ lié}$$

4 vect de vecteur 3 vec

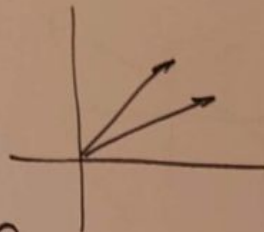
Si E est un $\mathbb{K}$ -EV qui contient une famille
libre de n vec alors $\dim E \geq n$

$$\text{pour } \{(2, 1, 0, 5, 3); (3, 0, 0, 1, 5); (4, 3, 2, 1, 0)\}$$

Si E est un $\mathbb{K}$ -EV qui ~~possède~~ contient
une famille libre de n vec
Alors $\dim E \leq n$

Caractérisation
CAR^N pour libre

$|n \in \mathbb{N}^* \text{ et } e_1, e_2, \dots, e_n \in E$
pour () lib
 $\Leftrightarrow \dim \text{Vect}() = n$



Preuve

Es dim comme

$| E \neq \mathbb{K}$ -EV dim finie (n)

$| F = (e_1, e_2, \dots, e_n)$

lib $\Leftrightarrow$ min $\Leftrightarrow$ base

Preuve récursif

EXO

$$E = M_2(\mathbb{R})$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer (I, J, K, L) base E

SEV

| E $\mathbb{K}$ -EV dim fin n

| F SEV de

Alors

F dim fin

dim $F \leq \dim E$

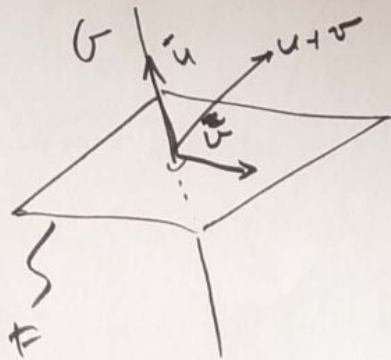
Si $\dim F = \dim E$, alors $F = E$

Somme directe (ou pas)!

| E $\mathbb{K}$ -EV Plu U

F et G SEV de E

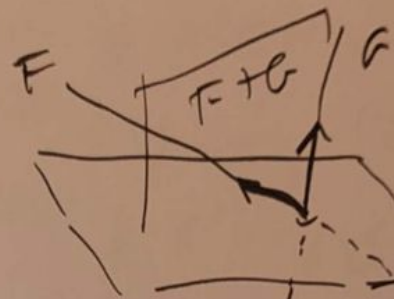
$F \cup G$ n'a pas un en général



1) Somme de 2 EVs

F et G $F+G$

E Vect($F \cup G$)



$$= \{f+g, f \in F, g \in G\}$$

Dim 1 som



$(e_1, e_2, \dots, e_k)$ base de $F \cap G$

$(e_1, e_2, \dots, e_k, f_{k+1}, f_{k+2}, \dots, f_n)$ base de F

f_{k+1}

f_{k+2} base de G

de $F+G$

$$(e_1, e_2, \dots, e_k, \underbrace{f_{k+1}}_y, \underbrace{f_{k+2}}_y, \dots, f_n)$$

Si $\dim F < +\infty$ or $\dim G < +\infty$

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

$$\text{Card } \cup \quad + \quad -$$

EXO

$$E = \mathbb{R}^4$$

$$F = \{(x, y, z, t) \in E \mid x + 2y - z + t = 0\}$$

$$G = \text{Vect}\{(0, 1, 1, 0), (2, -1, 0, 0), (1, 1, -1, -1)\}$$

Cal $\dim(F \cap G)$

$$F \supset (2, -1, 0, 0), (1, 0, 1, 0) \text{ or } (1, 0, 0, -1)$$

$$\text{DC } \dim F = 3$$

$$\text{--- } G = 3 \text{ car}$$

$$G \neq F, \text{ DC } \dim(F+G) = 4$$

$$\text{Finalement } \dim(F \cap G) = 3 + 3 - 4 = 2$$

Som directe

$$F \oplus G \text{ssi } F \cap G = \{0_E\}$$

$$\text{Sup } F \cap G = 0_E \text{ or que } f+g = f'+g' \\ \text{ou } f, f' \in F \text{ or } g, g' \in G$$

$$\text{Al } f-f' = g'-g \text{ DC } f-f' \in F \text{ or } g-g' \in G$$

$$\text{DC } f-f' \text{ or } g-g' \text{ sont dans } F \cap G,$$

$$\text{Et c'est } x \text{ de } F \oplus G \text{ se décompose} \\ x = \underbrace{f}_F + \underbrace{g}_G \text{ de manière unique!}$$

$$\text{Si } \dim F < +\infty \text{ or } \dim G < +\infty$$

$$\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$$

Preuve précédente $\exists ! \text{EV}$

$$E, 2 \text{ dx-EV}$$

$$E \times E' = \{(x, x'), x \in E \text{ or } x' \in E'\}$$

$$\dim E \times E' = \dim E + \dim E'$$

Preuve

$$\forall (x, x') \in E \times E' \dots$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \dim E^n = n \dim E$$

Supplémentarité

$$E = F \oplus G$$

$$(E = F + G \text{ or } F \cap G = \{0_E\})$$

$$E = \mathbb{R}^3$$

$$E = F \oplus G$$

$$E = F \oplus G$$

$$= (F) + G''$$

$\neq$ Supplémentaire!

~~sup~~
~~EX~~

Si $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ b.d.e

$$F = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k)$$

$$G = (e_{k+1}, e_{k+2}, \dots, e_n)$$

$$\text{Al } E = F \oplus G$$

Si E est simple, tout sev
de E possède un sup (et pas du'm!)

Axiome
choix

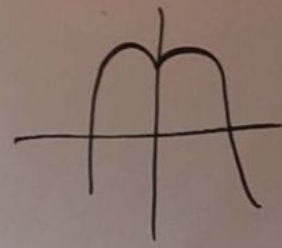
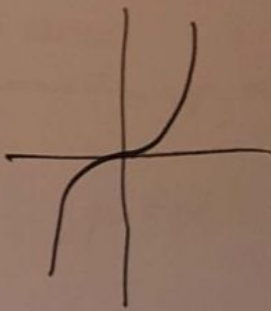
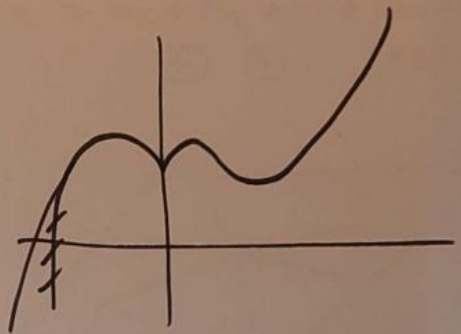
EDO

$$E \text{ R-EN } a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$I = \{f \in E / \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)\} \text{ impair}$$

$$P = \frac{}{} = f(x) \text{ pair}$$

$$\text{Donc } E = P \oplus I$$



Sol

Caractérisation

E $\mathbb{R}$ -EV dim fin

For G 2 sev supplém
ssi

$$- F \cap G = \{0_E\}$$

$$- \dim F + \dim G = \dim E$$

G dim

Si $E = F \oplus G$ $\rightarrow \dim G < +\infty$

G dim finie

$$\dim_F G = \dim G$$

Sev ∞ ~~se~~ G dim 1 = hyper plans

Exo

E $\mathbb{R}$ -EV $\alpha \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$H = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$$

$\nearrow$ que est un hyper plan de E

2 APMS de ?

$F_1, F_2, \dots, F_m$ Sev de E

$$F_1 + F_2 + \dots + F_m \quad \sum_{i=1}^m F_i$$

Sev $\text{Vect}(F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_m)$

$$\left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i \mid \forall 1 \leq i \leq m, \lambda_i \in F_i \right\}$$

$$\text{Ex } \text{Vect}(e_1, e_2, e_3) = \mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2 + \mathbb{R}e_3$$

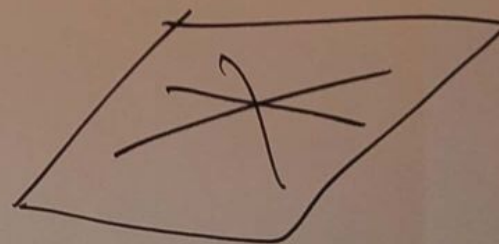
mult

Sommes directes

$$G_n = F_1 + F_2 + \dots + F_m \rightarrow \dim$$

$\oplus \oplus$

ssi mesure parvenue:



pièces